1. BÖLÜM

İntegral Denklem Nedir?

İntegral denklem bilinmeyen bir $u(x)$ fonksiyonunu integral işareti altında içeren denklemlerdir.

Genel Form

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)\, F(u(t))\, dt$$

Sınıflandırma:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) F(u(t))\,dt$$ 2.tip Fredholm

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) F(u(t))\,dt$$ 1.tip Fredholm

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) F(u(t))\,dt$$ 2.tip Volterra

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) F(u(t))\,dt$$ 1.tip Volterra

$$\boxed{f(x) = \lambda \int_0^x K(x-t)\, u(t)\, dt}$$

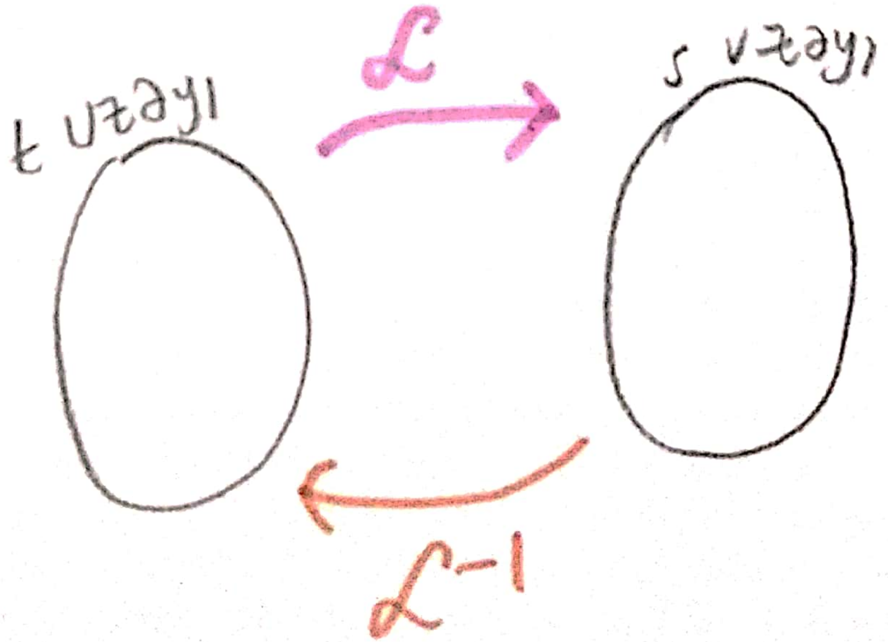
$F(u(t)) = u(t)$ yani lineer

Böyle bir integral denklemi nasıl çözebiliriz? Yani $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunu nasıl bulabiliriz?

(f, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı)

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

dönüşümüne Laplace dönüşümü denir.



f fonksiyonunun hangi durumlarda Laplace dönüşümü mevcuttur?

Tanım: $\alpha \in \mathbb{R}$, $M, T \in \mathbb{R}^{>0}$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonu için,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad (\forall t \geq T)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(t)$'ye (α) üstel basamaktan fonksiyon denir.

Teorem: f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve üstel basamaktan bir fonksiyonsa Laplace dönüşümü $s > \alpha$ için mevcuttur.

İspat: Has olmayan integraller için karşılaştırma testi. $\square$

6

! Bu teorem sadece yeter şartı vermektedir, gerek koşulu vermez, örneğin $f(t) = te^{t^2}\cos(e^{t^2})$ fonksiyonu $s > 0$ için Laplace dönüşümüne sahiptir fakat üstel basamaktan bir fonksiyon değildir.

Tanımdan bariz olan iki özellik:

f_1 ve f_2 Laplace dönüşümü mevcut olan iki fonksiyon olsun, bu durumda

- $\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\}$
- $\mathcal{L}\{cf\} = c\,\mathcal{L}\{f\} \quad (c \in \mathbb{R})$

eşitlikleri sağlanır.

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x-t)u(t)\,dt \rightarrow u(x)\text{'i bulmak istiyoruz.}$$

Tanım: f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)\, f_2(t)\,dt$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem: f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri mevcut olsun, bu durumda

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\}\,\mathcal{L}\{f_2\}$$

eşitliği sağlanır.

$$f(x) = \lambda \int_0^x K(x-t)\,u(t)\,dt$$

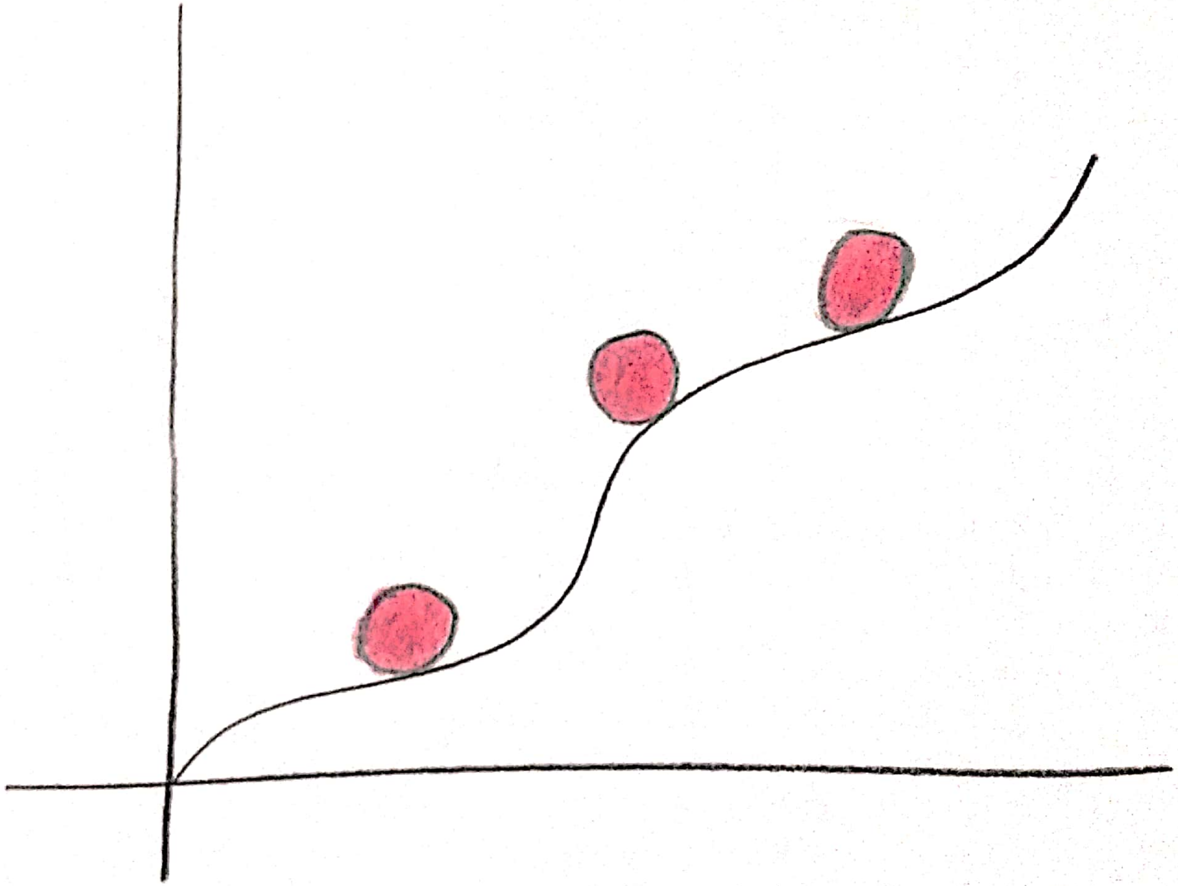
• Artık çözüm formülünü yazabiliriz.

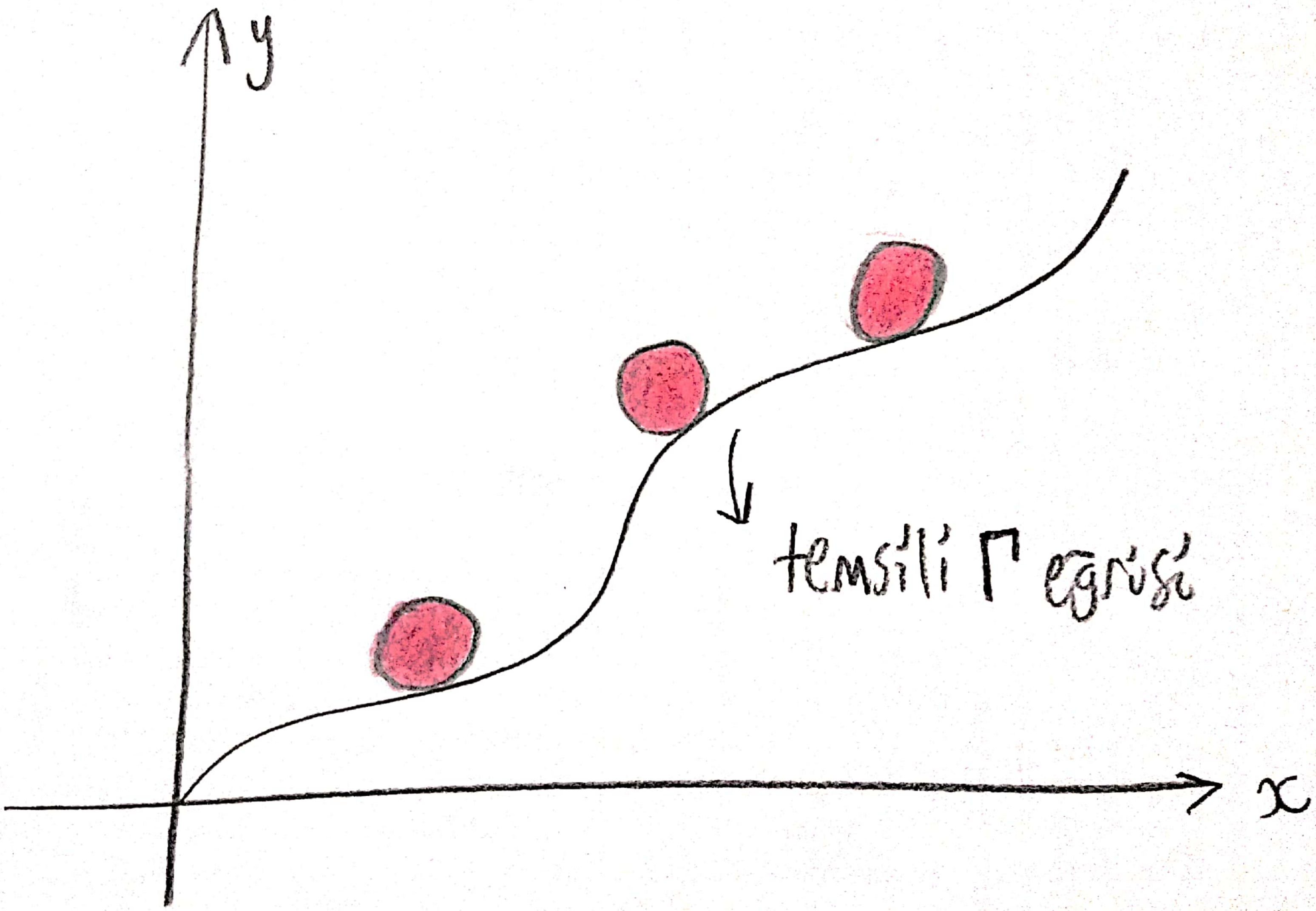
$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \lambda\,\mathcal{L}\{K(x)\}\,\mathcal{L}\{u(x)\}$$

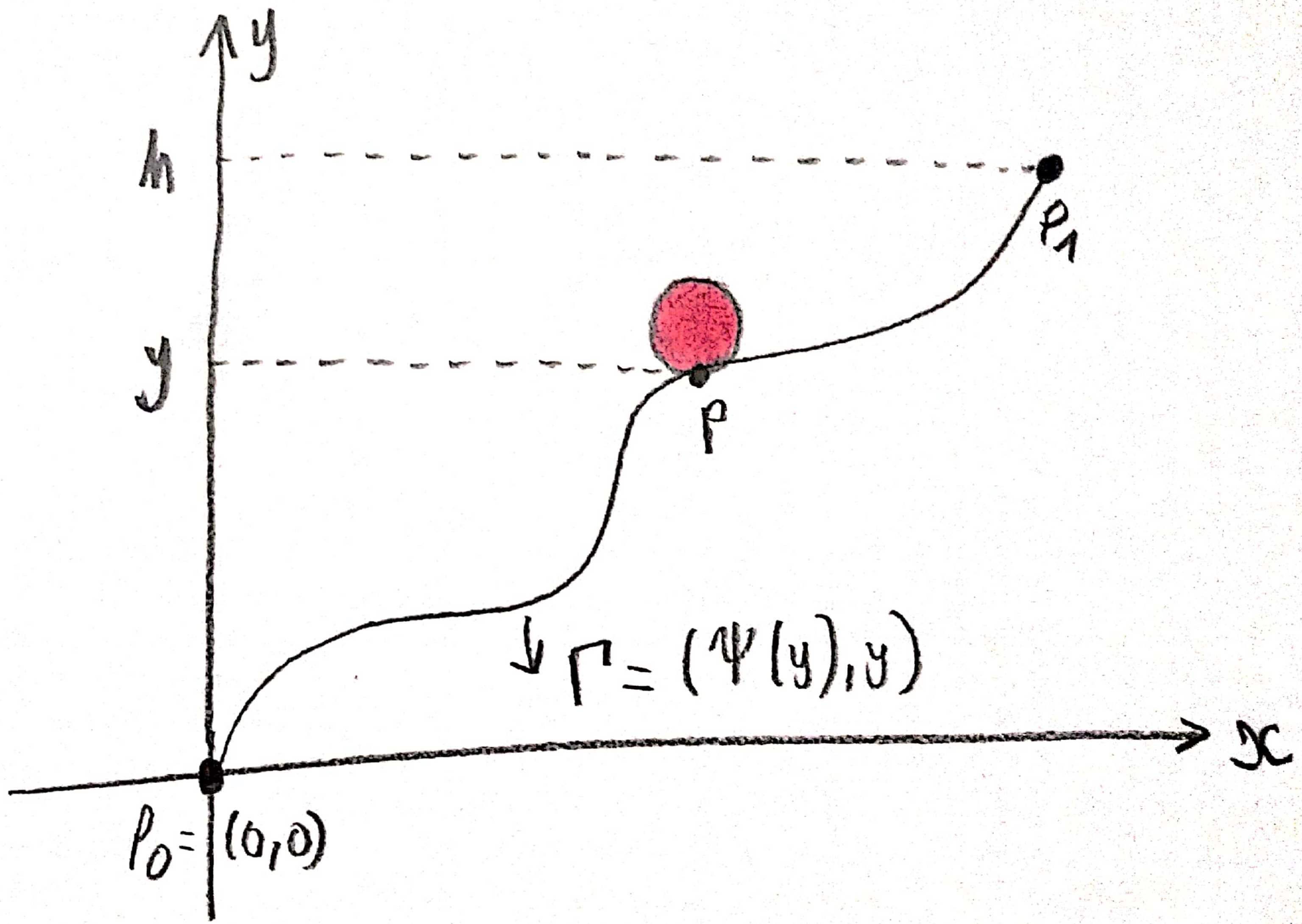
$$\Rightarrow \mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(x)\}}{\lambda\,\mathcal{L}\{K(x)\}} = F(s)$$

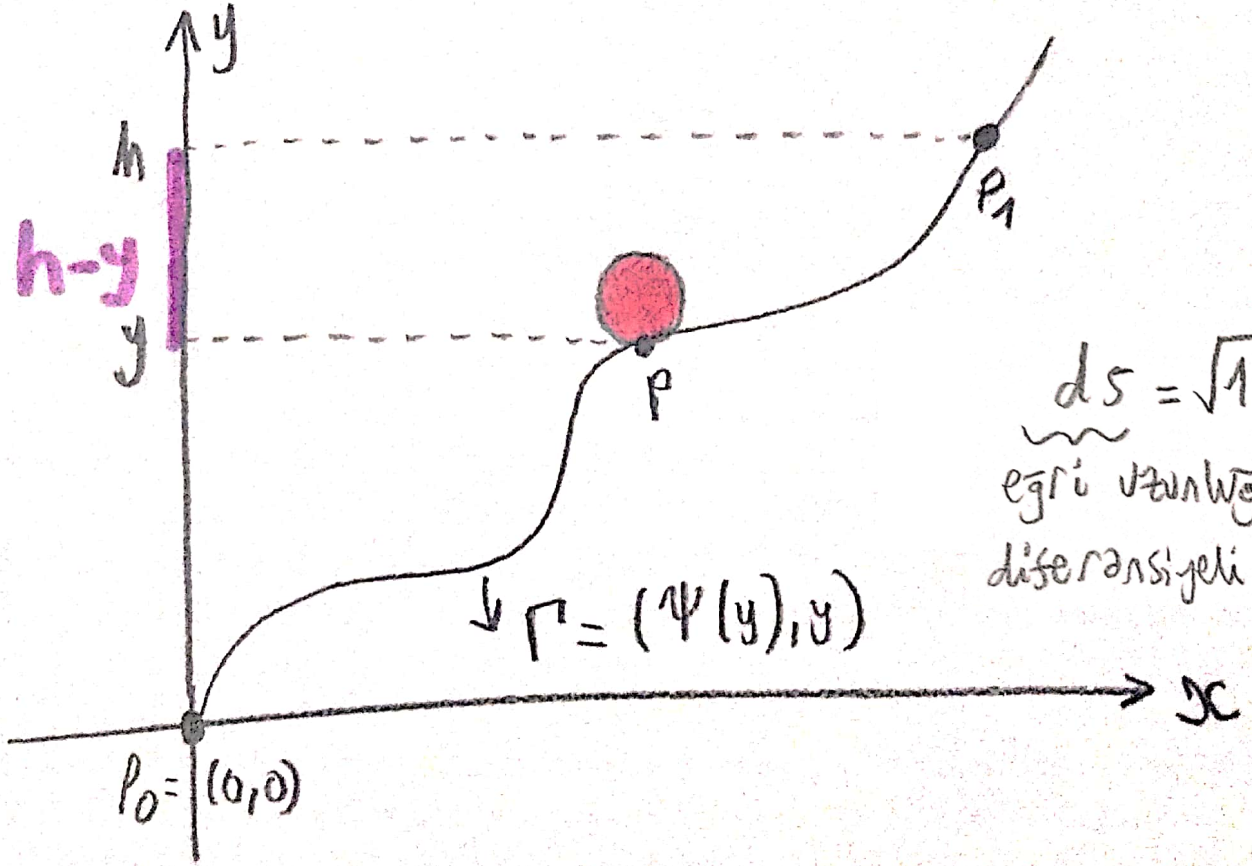
$$\Rightarrow \boxed{u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

2. BÖLÜM




y
temsili Γ eğrisi
x


y
h
y
P_1
P
$\Gamma = (\Psi(y), y)$
x
$P_0 = (0,0)$



$$\underbrace{ds}_{\text{eğri uzunluğu diferansiyeli}} = \sqrt{1+(\psi'(y))^2}\, dy$$

P noktasında enerjinin korunumu:

$$\frac{M}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Mg(h-y)$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(h-y) \Rightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(h-y)$$

neden negatif kök?

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(h-y)} = |v|$$

ds uzunluk boyutunda $|v|$ uzunluk / zaman boyutunda dolayısıyla $\frac{ds}{|v|}$ zaman boyutunda olur

$$\text{Toplam Zaman} = \int_0^h \frac{ds}{|v|} = \int_0^h \frac{\sqrt{1+\varphi'(y)^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}\,dy = T(h)$$

$h>0$

$$\Rightarrow T(h)\sqrt{2g} = \int_0^h \frac{\sqrt{1+\psi'(y)^2}}{\sqrt{h-y}}\,dy \qquad T(h)\sqrt{2g} =: f(h)$$

$$\sqrt{1+\psi'(y)^2} =: \phi(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(h) = \int_0^h \frac{\phi(y)}{\sqrt{h-y}}\,dy}$$

Abel'in integral denklemi

Birinci Tip. Volterra!

Artık bu integral denklemi çözmeye çalışacağız.

$T(h) = T_0 =$ sabit olsun istiyoruz. $\sqrt{2g}$'de bir sabit.

integral denklemin getirdiği $K(h,y) = K(h-y)$ tipinde

dolayısıyla; $\mathcal{L}\{\phi(y)\} = \dfrac{\mathcal{L}\{\sqrt{2g}\,T_0\}}{1.\,\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{y}}\}}$

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$$\mathcal{L}\{\phi(y)\} = \frac{\mathcal{L}\{\sqrt{2g}\,T_0\}}{\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{y}}\right\}} = \frac{\sqrt{2g}\,T_0}{s} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2g}\,T_0\,\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}\,s} = \sqrt{\frac{2g\,s}{\pi\,s^2}}\,T_0$$

$$\mathcal{L}\{\phi(y)\} = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot T_0$$

$$\phi(y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \cdot T_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\,T_0\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\,T_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\,T_0\,\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow \phi(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} T_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$\phi(y) := \sqrt{1+\psi'(y)^2}$ olarak tanımlamıştık.

$$\sqrt{1+\psi'(y)^2} = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} T_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow 1+\psi'(y)^2 = \frac{2g}{\pi^2} T_0^2 \frac{1}{y}$$

$\frac{2g}{\pi^2} T_0^2 := A$ olsun, bu bir sabit.

$$\Rightarrow 1+\psi'(y)^2 = \frac{A}{y} \Rightarrow (1+\psi'(y)^2)y = A$$

$$\Rightarrow y + [\psi'(y)^2]y = A \Rightarrow A - y = [\psi'(y)^2]y \Rightarrow \frac{A-y}{y} = \left(\frac{d\psi(y)}{dy}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{A-y}{y}} = \frac{d\psi(y)}{dy} \Rightarrow \int \sqrt{\frac{A-y}{y}}\,dy = \int d\psi(y)$$

$$\int \sqrt{\frac{A-y}{y}}\,dy = \int d\psi(y)$$

$y = A\sin^2\theta$ dönüşümü uygulayalım

$$A := \frac{2gT_0^2}{\pi^2}$$

$$y = A\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow dy = 2A\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$\int \sqrt{\frac{A(1-\sin^2\theta)}{A\sin^2\theta}}\, 2A\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \psi(y) + c$$

$$\boxed{1-\sin^2\theta = \cos^2\theta}$$

$$\int \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\, 2A\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \psi(y) + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\, 2A\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \psi(y) + c$$

$$\Rightarrow 2A\int \cos^2\theta\, d\theta = \psi(y) + c = 2A\int (1+\cos(2\theta))\, d\theta$$

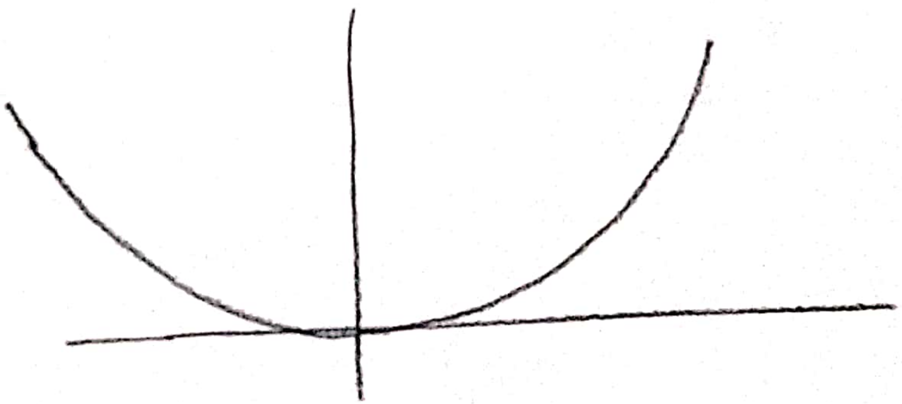
$$\boxed{\cos^2\theta = 1+\cos(2\theta)}$$

$$\psi(y) + c = 2A\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)$$

$$\psi(y) = A(2\theta + \sin 2\theta) + c = \frac{2gT_0^2}{\pi^2}(2\theta + \sin 2\theta) + c$$

$\Gamma = (\psi(y), y)$ şeklindeydi $\psi(y)$ ve y'yi θ parametresine bağlı olarak bulduk. $(0,0)$ bitiş noktası olduğu için $c = 0$ olur.

$$\boxed{\Gamma = \left(\frac{2gT_0^2}{\pi^2}(2\theta + \sin 2\theta),\ \frac{2gT_0^2}{\pi^2} \sin^2\theta \right)}$$



Paraboldan daha geniş

Sikloid eğrisi

Fiziksel Yorumu: Geriden başləyan cismin almәsı gereken yol daha fәzlәdır, fakәt geriden başlәdığı için bulunduğu noktәdә eğim daha büyük olduğu için yer çekimi bu cismi öndeki bir cisme göre daha çok hızlandırır ve öndeki yolu daha kısә olan cisimlere yetişmiş olur.