Minkowski Uzayzamanı'nın Matematiği

Batuhan BAYIR

Ankara Üniversitesi - Fizik Bölümü

10.7.2021

Özet

Bugün özel görelilik teorisinin matematiği hakkında konuşacağız.

Bilineer Form Tanımı

V bir $\mathbb{F}$-vektör uzayı olsun, $g : V \times V \to \mathbb{F}$ olmak üzere,
$(\forall v_i, w_i \in V$ & $\forall a_i \in \mathbb{F})$

- $g(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1 g(v_1, w) + a_2 g(v_2, w)$
- $g(v, a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 g(v, w_1) + a_2 g(v, w_2)$

özellikleri sağlanıyorsa g, V üzerinde bir **bilineer form**'dur.

Simetri ve Nondejenerelik Özellikleri

g, V vektör uzayı üzerinde bir bilineer form olsun,

- $(\forall v, w \in V): \; g(v,w) = g(w,v)$
- $(\exists v \; \& \; \forall w \in V): \; g(v,w) = 0 \Longrightarrow v = 0$

ilk özelliğe **simetri** özelliği, ikinci özelliğe **nondejenerelik** özelliği adını veriyoruz.

Matematiksel Fizik'te İç Çarpım Tanımı

g tekrar V vektör uzayı üzerinde bir bilineer form olsun.
g eğer ekstra olarak *simetri* ve *nondejenerelik* özelliklerini de sağlıyorsa g artık V vektör uzayı üzerinde bir **iç çarpım**'dır.

Özel olarak (V, g) ikilisine **iç çarpım uzayı** adını veriyoruz.

TANIM ÜZERİNE BİRAZ TARTIŞALIM

Tanımın Tartışılması

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

- $g(v, v) > 0$
- $g(v, v) = 0 \implies v = 0$

Tanımın Tartışılması

$$g : V \times V \to \mathbb{F}$$

kullanamıyoruz!

- $\cancel{g(v,v)} >_{?} 0$

genelleştirdik!

- $\cancel{g(v,v) = 0} \implies v = 0$

Örnek 1

$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g(v, w) = v^1 w^1 + v^2 w^2 + ... + v^{n-1} w^{n-1} - v^n w^n$

g, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır.

Örnek 2

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto v^1 w^1 - v^2 w^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u = (1,2) &\Longrightarrow g(u,u) = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3 < 0 \\ v = (1,1) &\Longrightarrow g(v,v) = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0 \\ w = (3,2) &\Longrightarrow g(w,w) = 3 \times 3 - 2 \times 2 = 5 > 0 \end{aligned}$$

Sınıflandırma Tanımı

V bir vektör uzayı, g'de V üzerinde bir iç çarpım olsun,
$\forall v \neq 0 \in V$ için;

- $g(v,v) < 0$ ise g'ye **negatif tanımlı**
- $g(v,v) \geq 0$ ise g'ye **pozitif tanımlı**

denir. Pozitif tanımlılığın ve negatif tanımlılığın beraber sağlanabildiği durumlar oluyorsa g'ye **belirsiz** denir.

Kuadratik Form Tanımı

V bir vektör uzayı olsun,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : V &\to \mathbb{F} \\ v &\mapsto g(v,v) \end{aligned}$$

gönderimine **kuadratik form** adı verilmektedir.

Birim Vektör Tanımı

Eğer herhangi bir v vektörü için, $\mathcal{Q}(v) = \pm 1$ oluyorsa v vektörüne **birim vektör** denir.

İndeks Tanımı

e_i'ler V vektör uzayının baz vektörleri olsunlar. $\mathcal{Q}(e_i) = -1$ özelliğini sağlayan e_i baz vektörlerinin sayısına g iç çarpımının **indeksi** adı verilmektedir. (Bazen bu sayıya **r sayısı** da diyoruz.)

Peki bu tanımı neden yaptık?

Teorem 1

g iç çarpımının indeksi (r sayısı) ortonormal baz seçiminden bağımsızdır.

Minkowski Uzayzamanı Tanımı

$\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu reel vektör uzayı, g ise indeksi 1 olan iç çarpım olsun. $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, g)$ ikilisine **Minkowski uzayzamanı** denir.

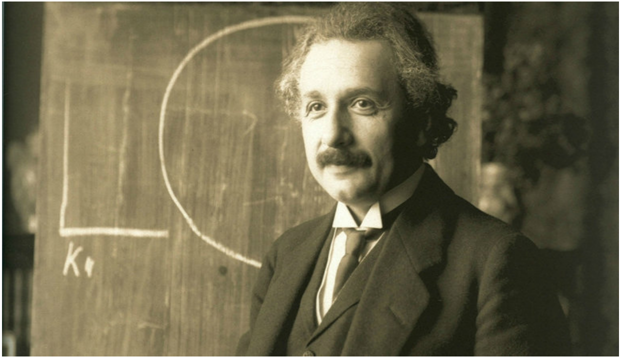
Hermann Minkowski | 1864-1909

Peki $\mathcal{M}$ fizik yapabilmemiz için tek başına yeterlimi?

Özel Görelilik Teorisi

Özel Görelilik Teorisi $:= \mathcal{M} +$ Fiziksel Postülatlar

- (Denklik Prensibi) Fizik yasaları birbirlerine göre sabit hızla hareket eden tüm sistemlerde aynıdır.
- Işık hızı $c = 3 \times 10^8 [\frac{metre}{saniye}]$ *sabit* değerine sahiptir. Bu değer evrendeki en yüksek hız değeridir.



Özel Görelilik'te Vektörlerin Sınıflandırılması

$\mathcal{M}$'den bir w vektörü alalım:

- $g(w,w) < 0$ ise w *zamansal (timelike) vektör*
- $g(w,w) = 0$ ise w *ışıksal (lightlike) vektör*
- $g(w,w) > 0$ ise w *uzaysal (spacelike) vektör*

olarak adlandırılır.

Sınıflandırmanın Fiziksel Yorumu

Özel görelilik teorisinde *konum vektörleri* $w = (ct, x, y, z)$ formundadır (c ışık hızı, $t \in \mathbb{R}$).

$\underline{g(w, w) \ldots 0}$

$$c^2t^2 + x^2 + y^2 - z^2 \ldots 0$$

$$c^2t^2 \ldots - x^2 - y^2 + z^2$$

Lemma (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$x = (x^1, x^2, x^3)$ ve $y = (y^1, y^2, y^3)$ $\mathbb{R}^3$'te iki vektör olsun.
$$(x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3)^2 \leq ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)((y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2)$$
eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun sağlanabilmesi x ile y vektörlerinin *lineer bağımlı* olmasıyla mümkündür.

İspat: Dinleyiciye bırakılmıştır.

Sol Resim Cauchy | Sağ Resim Schwarz

Teorem 2

$v, w \in \mathcal{M}$ iki *ışıksal vektör* olsun.
v ile w'nun birbirlerine *paralel* olabilmesi için gerek ve yeter şart ($\Longleftrightarrow$) v ile w'nun birbirlerine *dik* olmasıdır.

Teorem 2'nin İspatı: (paralellik $\Longrightarrow$ diklik)

v veya w'dan biri 0 vektörüyse her şey bariz. $v, w \neq 0$ olsun.

Diyelim ki v, w ışıksal vektörleri birbirlerine paralel olsunlar. Bu durumda $\lambda \in \mathbb{R}$ için $v = \lambda w$ eşitliği sağlanacaktır. Şimdi bu eşitliği kullanarak v ile w'nun iç çarpımına bakalım:

$$g(v, w) = g(\lambda w, w) = \lambda g(w, w) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Böylece v ile w'nun birbirlerine *dik* olduğunu ispatlamış olduk.

Teorem 2'nin İspatı: (diklik $\Longrightarrow$ paralellik)

$$g(v,v) = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2 = 0$$
$$g(w,w) = (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 - (w^4)^2 = 0$$
$$g(v,w) = v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3 - v^4w^4 = 0$$

$$(v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3)^2 = (v^4w^4)^2 = (v^4)^2(w^4)^2$$
$$(v^1w^1+v^2w^2+v^3w^3)^2 = ((v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2)((w^1)^2+(w^2)^2+(w^3)^2)$$
$$(v^1, v^2, v^3) = \lambda(w^1, w^2, w^3)$$

$$v^4 = \frac{v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3}{w^4} = \frac{\lambda((w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2)}{w^4}$$
$$v^4 = \frac{\lambda(w^4)^2}{w^4} = \lambda w^4$$
$$\Longrightarrow \boxed{(v^1, v^2, v^3, v^4) = \lambda(w^1, w^2, w^3, w^4)}.$$

Teorem 3

$\mathcal{M}$'de birbirine dik olan *zamansal* iki vektör yoktur.

TEŞEKKÜRLER